ヒルベルトの数学手帳

林 晋
●京都大学大学院文学研究科

ヒルベルト遺稿集の研究

ドイツの数学者ダーフィット・ヒルベルト(1862-1943)は，数学の多くの分野における革命的研究と「20世紀現代数学」の背景となったヒルベルト公理論の提唱で知られている．そのヒルベルトは現代日本の大学の標準から見れば驚くほど多数の講義を教えた．その講義の内容の多くは，彼が次々に創り出す彼自身の新理論だった．ヒルベルトは講義しながら理論を創り上げていたのである．彼は講義をする際には，詳しい講義ノートを作成するのが若いころのからの習慣であった．著名な数学者になってからは，学生や助手に手伝わせて清書された講義ノートを作成している．

その講義ノートには，未発表の研究結果だけでなく，研究の動機などの彼の「肉声」が記録されている．それらを仔細に検討すると，1960-70年代に喧伝され，現代も根強く残っている「現代抽象数学の父」「数学から内容を追放した形式主義者」というヒルベルト像に大幅な修正が必要であることが判る．たとえば，彼の物理学への関与は副次的であると考えられていたが，最近になって，イスラエルの数学史家 Leo Corry は，ヒルベルト遺稿集の研究により，「物理学の基礎」がヒルベルトの数学においてきわめて重要な位置を占めていたことを明らかにしている．

講義ノートなどのヒルベルトの遺稿は，ゲッチンゲン大学図書館とゲッチンゲン大学数学研究所に保管され研究のために公開されている．ヒルベルト遺稿集の未発表一次資料に基づく地道なヒルベルト研究は，1980年代の終りから始まり現在も世界の各地で続いている．計算機科学者であった私が，そういう専門的で地道な歴史研究にのめり込むことになったのは，2006年夏に上梓した岩波文庫『ゲーデル 不完全性定理』の仕事を引き受けたからだった．この本は解説が本文の5倍近くもある岩波文庫としては「異形」のものとなったが，それが私のキャリアをかえてしまったのである．

このような文庫本を書くことになった経緯は [1] に書いておいたが，それを引き受けたのはもう十数年前このことだった．岩波文庫のアインシュタイン『相対性理論』と同じ構成で，読者は本文よりも解説を読むのだという前提で書く，というのが岩波書店からのリクエストだった．少年の頃から歴史好きで，院生時代に数学史家を目指したこともあった私は，「解説」を書くために数学史研究にのめり込み半ば数学史家となった．そればかりか，2005年に京都大文学研究科で情報と歴史の双方に関連した職を得ることができたことは実に僥倖であった．

京大文学研究科に転職した私は，私が構築しつつある情報社会学理論の中心概念「形式化」に関する講義を始めた．講義前半では，岩波文庫のための自筆原稿を資料として数学基礎論史について話し，後半では，M. ウェーバー，A. ギデンズなどの近代化理論により，それを広く社会・文化の歴史の中に位置づけ，さらに情報学などにおける形式化の問題に結びつけるという計画だった．

その前半の数学基礎論史の準備中に，私はある本の記述が気になった．数学の正しさは証明で保証できる．社会学では形式的判断基準がないので絶対的正しさが保証できない反面，完全に否定される危険性も少ない．しかし，歴史学の場合は絶対的正しさの保証ができないにも関わらず，具体的な史料一つによって，それまで築いてきた自説を一挙に崩されることがある．だから，歴史研究では，どんな些細なことでも疎かにせずチェックするしかない．たぶん問題ないとは思ったが，このときも一次資料にあたって確認することにした．

ヒルベルトの数学手帳

幸いあたるべき一次資料は，5年ほど前の遺稿集調査の際に手に入れていたヒルベルトの数学手帳だった．

この3冊の数学手帳は，ヒルベルトが，まだ無名だった若き日から老大家となった1920年代まで書き続けられたものであり，歴史家R. Thieleが，その中からキャンセルされた「第24問題」を発見したことで知られていた．私は書斎の片隅にあった数学手帳の写しを読み始めた．案の定，気になったことには何の問題もなかった．しかし，この作業の中で，私は予想もしなかった驚くべきものを発見してしまったのである．

ヒルベルトの公理論，形式主義，ヒルベルト計画は有名だが，なぜそれらが構想されたかが議論されることは少ない．ヒルベルトが，1898年ころあたかも突然「幾何学基礎論」の研究を始め，「無矛盾＝存在」のテーゼを主張し，その延長上で1900年の23の問題の第2問題「算術(実数論)の無矛盾性証明」が提出され，やがてそれがヒルベルト計画に進化した．まあ，この辺りが，多く方の持っているイメージではないだろうか．

歴史家の間では，もう少し詳しい事情が知られていた．『幾何学基礎論』の成立はM.-M. Toepellにより詳細に研究され，有名な「無矛盾＝存在」のテーゼは，1898-9年の冬学期の講義の講義録の最後に現れることが知られていた．このテーゼが公になったのは1899年の『数の概念について』という論文であり，1899年頃が「無矛盾＝存在」のテーゼの成立時期だと，歴史家の多くは考えていたと思われる．

私自身も，1897年9月のカントールからの手紙で，集合論の矛盾について知ったヒルベルトが，その後しばらく続いたカントールとの文通の中で，このテーゼを形成していったのだろうと考えていた．これは特別新しい説ではない．しかし，私の説にはほかにはない特徴があった．このテーゼの源に，彼の若き日の代数学研究，つまり，1880年代から1890年代最初にかけての不変式論研究があるのではないか，と考えていたのである．

1897年9月にカントールからの手紙を受ける数か月前に，ヒルベルトは『数論報告』を脱稿しており，その前書きで，クンマー，クロネカーの代数的整数論に象徴される「数式と計算に基づく数学」に対して，リーマン，デーデキントの「概念と思惟による数学」の方法論の優位さを宣言した．つまり，後に「20世紀現代数学」の方法論に発展する抽象的超越的方法論を

David Hilbert

称揚したのである．

そして，『数論報告』脱稿直後から始めた不変式論講義においても，このことを意識した「数学存在の三段階論」を展開した．また，彼は，その不変式論の中で登場した非構成的な有限基底定理を発見する以前の不変式講義の講義録の中で，当時の代数学における複雑な計算(アルゴリズム)を問題視し，それに嫌悪感さえ表明していた．([1] 4.6, 4.7, 4.11 節参照)

これらの事実を傍証として，私は次のような自説を組み立てていた．「ヒルベルトは1880年代の不変式論研究において，数式アルゴリズム中心の19世紀代数学から離陸し大成功を収めた経験から，リーマン・デーデキント的数学を，数学の真の姿と規定し，その後も，そのスタイルで代数的整数論などの研究に勤しんでいた．しかし，その手法の「技術的基礎」となるはずの無限集合論が破綻を来たしたことを知るにおよび，「無矛盾 = 存在」のテーゼをその柱とする公理論(前期形式主義)，さらにはヒルベルト計画(後期形式主義)の研究に手を染めることとなった．」

岩波文庫『不完全性定理』の解説も，この説に基づいて執筆していた．この説からすると，ヒルベルトは，「無矛盾な集合」というカントールのアイデアから，「無矛盾性 = 存在」のテーゼを考え付いたとするのが自然だった．しかし，この説には間接的傍証しかなかったので，あくまで推測として論を進めていた．しかし，数学手帳のページを少し繰っただけで，その説は簡単に崩れてしまった．そればかりか数学史の「常識」の多くが崩れ去っていったのである．

常識を塗り替える二つのノート

私が発見したノートによれば「無矛盾性＝存在」の思想は1890年代初めにすでに現れている．図1のノートは，1893年頃に書かれたと思われるが，先ほど述べた1898-9年の講義録にある，最初の「無矛盾性＝存在」の思想の表明は，この1890年代最初の文章(の最初の文)と一字一句同じなのである．そして，このノートの周辺には，物理学や幾何学の公理化の話，非ユークリッド幾何学とユークリッド幾何学の「可能性」に関するノートなどがあった．これらは，従来1890年代終わりに登場したと思われていた「無矛盾性 = 存在」のテーゼが，彼が不変式論の研究を終え，他分野の研究を始めようとしていた1890年代最初のものだったことを示している．

この発見は，それほど驚くには当たらないともいえた．これらのノートの時期はハレ大学における第2回ドイツ数学者会議において，H. ヴェーバーの講演を聴いたヒルベルトが，幾何学は「点，線，面の理論ではなく，机，椅子，ビアマグの理論でも良い」と言ったという有名な伝承の時期の少し後だからである．また，「無矛盾性＝存在」のテーゼと類似の思想は当時の他の数学者にも見られるので，このとき「無矛盾性＝存在」のテーゼが構想されたことに違和感はない．

しかし，図2のノートを発見したときには本当に驚いた．私の学者人生の中で一番驚いたといってもよい．それは1888年から1889年，つまり，彼がそれまでのアルゴリズム中心の研究方向を転換し，有限基底定理というアルゴリズム不在の補題を編み出して，当時の代数学の未解決大問題「ゴルダンの問題」を解決したころに書かれたものらしい．いずれにせよ1880年代終りから1890年代最初までに書かれたことだけは確実である．その和訳を[2](pp. 137-139)から引用しよう．

> すべての数学の問題は，次の問題に還元できる：0と1からのみなる途切れることのない列
> (α) 0 0 1 1 0 0 …
> が与えられたとき，それとは異なる別の同じような列
> (β) 1 0 0 1 1 1 …
> を(計算操作により：[一部不明]，因数分解等，サイコロを振るのはなし[nicht würfeln])構成することができる規則が与えられているとする．ある列(β)の中に0が出てくるか，あるいは全ての列(β)が1のみでできているかのどちらであるか，それを有限回の操作により判定する．
>
> 私は次のように信じる：このような決定は有限回の操作(計算操作)により可能である．つまり，このような決定が有限個の操作(計算操作)ではできないというような命題は存在しない．つまり，すべての数学の問題は可解［lösbar］である．人間が(物質に関わらない純粋思惟により[durch reine Denken ohne Matherie]) 到達可能な理性［Verstande］も同様に解決できる．問題は一つだけある．(例えば，円積問題，$\pi = 3.14\cdots$ が10個の続く7を持つか，など．) この可能性の仮定から我々は出発する．

要するに，「問題の真偽を有限回の操作で判定できるという意味で，すべての数学の問題は解決可能だ」というのである．この「信念」は，かなり弱い形で1900年のパリ講演で主張されたことで有名だ．しかし，それは「信念」にすぎず，ヒルベルト自身が書いたように数学研究のインセンティブと考えるのが常識だろう．私もそう思っていた．もちろん，1928年にヒルベルトが，この主張の数理論理学版と解釈できる，第1階算術の形式的完全性を彼の証明論の目標のひとつとして掲げたことは歴史的事実であるし，ヒルベルトは同様な主張をほかでも行っている．しかし，それ

Existieren heisst die den Begriff definierenden Merkmale (Axiome) widersprechen sich nicht, d.h. es ist nicht möglich aus allen mit Ausnahme eines durch rein logische Schlüsse einen Satz zu beweisen, welcher dem letzten Axiom widerspricht. Man braucht jedoch, zumal im gewöhnlichen Leben existieren auch gleich für die Beschreibung der Dinge besonders förderlich sein, z. B. Gott existiert nicht, d.h. das Axiom Gott ist, ist zur Beschreibung vieler Erscheinungen überflüssig.

（上） 図1
文章の大意：存在とは概念を定義する公理が矛盾しないことをいう．現実の生活では役にたつものを存在するという．たとえば，だから，神は存在しない．
（下） 図2

Jedes Mathem. Problem kann auf folgende Frage zurückgeführt werden:
Gegeben ist ein Gesetz, wonach man aus jeder vorgelegten nur aus Null und 1 ~~bestehenden~~ bestehenden unendlichen Reihe
(α) 0 0 1 1 0 0 . . . .
eine bestimmte andere solche Reihe (durch Reihenoperationen: Größte Ganze suchen, Teilen mit etc. nicht Würfeln..)
(β) 1 0 0 1 1 1 . . . —
construiert werden kann. Man soll durch eine endliche Zahl von Operationen entscheiden, ob in irgend einer Reihe (β) eine 0 vorkommt oder ob alle Reihen (β) nur Einsen enthalten?

Ich behaupte: Jede solche Entscheidung ist durch eine endliche Zahl von Operationen (Reihenoperationen) möglich. d.h. Es giebt kein Gesetz, bei welchem die Entscheidung nicht durch eine endliche Zahl von Operationen möglich wäre. d.h. Jedes math. Problem ist lösbar. Alles dem menschlichen Verstande erreichbare (durch reines Denken ohne Mathesis) ist auch aufzulösen. Es giebt nur ein Problem. (z. B. Quadratur des Kreises. Hier $\pi = 3,14\ldots$ 10 aufeinanderfolgende 7 en etc.)
Von der Annahme der Möglichkeit geht man von vornherein aus.

らは数十年も後のことなのである．しかも，このヒルベルトの若き日のノートの主張は，彼が生涯を通して行ったさまざまな「数学の完全性」の主張の中で，おそらく最初であるだけでなく，最も「強い形」で述べられていたのである．

私はヒルベルト自身による有限基底定理の証明の論理的分析から始めて「極限計算可能数学」という数理論理学の理論を創っているが，私と共同研究者たちの得ていた結果から，この主張が有限基底定理と同種の論理的構造を持つことがすぐに分った．私は，ヒルベルトの数学思想が，不変式論研究を「ヒント」にしていると考えてはいたが，このノートは不変式論とヒルベルトの数学思想の関係が，そんな「軽い」ものではないことを示唆していたのである．

このノートを発見したとき，最初は何かの間違いだろうと思った．これがヒルベルト計画の時代である1920年代のものだったら，私はそれほどは驚かなかったろう．しかし，このノートはヒルベルトが代数学研究しかしていない時代のノートだった．この時代には，彼は数理論理学を知らないばかりか，集合論の用語さえ使っていないのである．私の認識では，このころのヒルベルトはあくまで代数学者であり，「数学の問題は…」というような数学論や数理哲学的な議論をする人ではなかった．

ゲッチンゲンで見たときの記憶では，数学手帳は相当にボロボロだった．また手帳の途中で筆跡が変わっていた．一度バラバラになったページを順番を間違えて綴じなおした，紙片に書きとめておいたノートを，後年になって別人が順番は無視して手帳に纏めた，などの理由により，ページ順と年代順が対応していないのではないか．ヒルベルトは日付を記入していないので，その可能性は否定できなかった．発見後の数日，私は，数学手帳は故意ではないものの，結果としての「偽書」なのではないのかと疑っていた．

しかし，自分の歴史観をもとに「偽書」であると疑うのは先入観というものだ．私は気を取り直して，筆跡が変化する時期，引用された手紙の日付，書き留められた研究計画，などを文献学的に既知の歴史といちいち付き合わせる作業を行った．ゲッチンゲン図書館にも「綴じなおした形跡はないか」と問い合わせを行った．その結果，疑問点はことごとく消えていった．数学手帳は「偽書」ではなく，発見したノートはたしかに1889年前後のものと推定されたのである．

そればかりか，カント哲学との関連で数学問題の可解性を論じているノートなど，ヒルベルトが，不変式論の時代に，数学の方法を哲学の立場からも考えていたことを示す有力な証拠がほかにも見つかった．これらの研究の結果，私は自らの説を大きく変更することになったのである．

新しい歴史観

この新しい歴史解釈は以前の私の解釈と異なり，従来の標準的解釈を大きく逸脱しているが，従来の説や私の古い説と異なり，多くの直截的史料を証拠としている．この新しい歴史観は学術論文や学術書等として発表する予定で作業を進めているが，そのかなりの部分を上に述べた岩波文庫の解説に収め，また原文の相当部分を web page で公開している[3]．新たに分ったことは膨大であるため，ここにその総てを示すことができず，これらの著書や web page などを見ていただくしかないが，それを大胆に纏めると次のようになる．

1880年代後半，まだ20代の無名青年代数学者であったヒルベルトは，当時の代数学の花形分野である不変式論の大問題に取り組むうち，当時の代数学の方法論が秘める限界に気がつき方法論の転換を行い，それを梃子に，当時の大問題「ゴルダン問題」を解決する．それ以後，その方向に向けて数学の全体を「書き直す」という作業を続けることとなった．そして，その方法論を支える思想の中心には「すべての数学は解決可能である」という可解性の思想があり，さらには「無矛盾性＝存在」のテーゼがあった．

この「思想」は，クロネカーの数学思想へのアンチテーゼとして位置づけられていたが，彼の数学が順調であった間は，それは彼の数学研究の「指針」でしかなく，それが彼の数学手帳の外に姿を現すことはなかった．しかし，1897年のカントール・パラドックスを知るにおよび，ヒルベルトは「クロネカーの亡霊」と闘うため，彼の若き日の思想を数学手帳から取り出し，

それを元に幾何学基礎論などの研究を公にするとともに、また、それ自体を合理的に実証するという若き日の「夢」の実現に向けて突き進むこととなる。それがヒルベルト計画であった。そして、一時期、関心の中心は可解性から無矛盾性にシフトしたものの、彼の最終目標は可解性、つまり、数学の完全性の実証にあったと思われる。そして、20世紀数学は、ヒルベルトのこの「可解性実証への夢」という「隠された」モチーフに影響されつつも、彼の「哲学的」夢とは大きく異なる方向に進んでいったのである。

私の新しい説を充分納得のいく合理的根拠をともなって提示するには、多くの議論が必要であり、また、さらなる歴史研究も必要である。また、現実の歴史というものは、上にまとめたような短い文章で書ききれるほど単純なものではない。例えば、彼の可解性思想は、19世紀中葉のドイツを席巻したE. デュ・ボア・レイモンの物理学的不可知論への反論でもあるので、彼の物理学研究との関連を研究する必要がある。私と私の共同研究者たちは、現在、これらの問題の研究を進めている。研究が進めば、我々の19-20世紀数学への見方が大きく変わるかもしれない。また、この研究は、単なる懐古的研究ではなく、コンピュータが数学のツールとして当然のものとなってきた21世紀という時代に、数学方法論の根本問題の一つである「計算」対「思惟(概念と推論)」の対立問題を考えるときの大きな指針となるのではないかと考えている。

数学手帳の研究は根気のいる地味な仕事だが、ひとり手帳を読んでいると百数十年の時間を隔てて、ヒルベルトという人物の存在を間近に感じるときがある。歴史研究の醍醐味というべきだろう。そして、それは時として愉快なものでもある。私の研究を手伝ってくれている学生の一人である西尾君は、ヒルベルトの筆跡を解読しながら思わず笑い出してしまうこともあるそうだ。軽妙な「格言」が書かれていることが少なくないからである。学生たちが発見した「格言」は[4]で公開されているが、そのうちの2つをここに収録しておく。訳はwebサイトを運営している学生たちのものである。

鉱山労働者：多くの数学者は、ある種の鉱山労働者に似ている。彼らは立坑を深く掘り進める。坑道はすでに埋め立てられ、そのため新鮮な空気や新たな活気を作業場に吹き込むことはできないというのに。彼らは、学問全体に対して何ら貢献することなく、最後は惨めにも枯死することとなる。

扉：数学において研究することは、習得した、あるいは無意識のうち意図しないうちに受け入れてきた偏見をたえず打ち棄てることにある。人はふつう、自分のやっていることが全く不要で、そこに簡単に開けられる扉があるということに気づくまで、(頭を壁に通そうとでもするように)困難を無視して意図を達しようとするものである。

私たちも偏見にとらわれて枯死することなく、ヒルベルトが数学手帳の中に秘かに埋めた黄金の鉱脈を掘り出したいものである。きっと扉はすぐそこにあるのだろう。

参考文献

[1] 私は如何にして歴史家になったか
http://www.shayashi.jp/HistorySociology/IAmHistorian.html
林晋.

[2] 『ゲーデル 不完全性定理』：K. ゲーデル著，林晋・八杉満利子訳と解説，2006年9月，岩波文庫(青944-1)，岩波書店.

[3] David Hilbert's Mathematical Notebooks
http://www.shayashi.jp/HistorySociology/HistoryOfFOM/HilbertNotebookProjectHomepage/index.html
Susumu Hayashi.

[4] David Hilbert's Mathematical Maxims —— ダフィット・ヒルベルトの数学的格言集
http://www.bun.kyoto-u.ac.jp/hi/hilbertmaxims/
寺澤大奈，西尾宇広，橋本雄太運営.

[はやし すすむ]